Пояснительная записка

Рабочая программа по курсу «Решение уравнений и неравенств с параметрами» для 10 класса **составлена на основе следующих документов:**

- Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (утвержден приказом Министерством просвещения РФ от 12.08.2022 № 732 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г.№413»)
- Положения «О рабочей программе учебных предметов (курсов)» МБОУ «СОШ №59», принятого на заседании педагогического совета 31.03.2022, протокол №3; утвержденного приказом директора № 256-р от 31.03.2022;
- Основной образовательной программы среднего общего образования МБОУ «СОШ №59»;
- Учебного плана для 10 класса МБОУ «СОШ №59» на 2023-2024 учебный год, утвержденного приказом директора № 260-р от 31.08.2023;
- Федерального перечня учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования (утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 21.09.2022 № 858),

При планировании содержания учебных занятий курса использованы УМК С.М.Никольского «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы»:

1. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: пособие для учащихся общеобразоват. учреждений (элективные курсы)/С.М. Никольский. – М.: Просвещение, 2010
2. Никольский СМ., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровень).10 класс. – М.: Просвещение, 2018.

Курс «Решение уравнений и неравенств с параметрами» предметно-ориентирован и предназначен для углубления математических знаний учащихся 10 класса общеобразовательной школы.

Задачи с параметрами представляют для школьников наибольшую трудность, как в логическом, так и техническом плане, поэтому уравнения и неравенства с параметрами – это один из труднейших разделов школьного курса математики. Задачи с параметрами – это задачи, в которых проверяется техника владения знаниями элементарной математики, методами решения уравнений и неравенств, уровень логического мышления учащихся.

Данный курс знакомит учащихся с методами решения алгебраических задач с параметрами. Предметный курс позволяет не только дополнять и углублять знания учащихся, но и развивать их исследовательские умения, логическое мышление. Решение уравнений и неравенств с параметрами открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития, применяемых в исследованиях и задачах смежных предметных областей.

Цели курса:

- Формирование у учащихся целостного представления о методах решения уравнений и неравенствах с параметрами.

- Развитие творческих способностей школьников при конструировании способов решения задач высокого уровня сложности.

Задачи курса

- Обобщение и систематизация знаний школьников об уравнениях, системах уравнений, неравенствах и способах их решения.
- Формирование у учащихся методов решения уравнений и неравенств с модулями и параметрами.
- Формирование у школьников умения применять знания и умения из разных разделов курса математики для конструирования способа решения задачи в нестандартной ситуации.
- Формирование действий самоконтроля у слушателей курса
- Развитие логического мышления школьников.
- Воспитание рациональности и креативности мышления учащихся.

Формирование математических понятий и способов решения задач курса происходит на основе выявления опыта учащихся по решению соответствующего класса уравнений и неравенств, установления смысловых связей нового материала с ранее изученным. Актуализация всех имеющихся сведений по изучаемой проблеме позволяет создать условия для выхода на новый уровень её решения, который характеризуется повышением степени абстрактности и приобретением нового смысла основных понятий.

Важная роль в курсе отведена функционально – графическому методу решения уравнений и неравенств, так как его применение позволяет ученику привести «красивое» решение сложной задачи, комбинируя знания из разных разделов курса математики.

В Приложении 1 приведены примеры упражнений для анализа и конструирования способов решения задач по курсу.

Однообразие в этапах организации деятельности слушателей (актуализация знаний и умений по теме; анализ и схематизация новых способов решения; применение новых способов решения уравнений и неравенств в ходе самостоятельной работы, контроль и оценка решения задач, рефлексия деятельности) создаёт эффект предсказуемости деятельности и делает совместную работу учителя и ученика на занятии психологически комфортной. Освоение новых методов решения уравнений и неравенств происходит в диалоговом режиме, с использованием коллективных форм организации самостоятельной работы учащихся. Такая методика способствует выявлению сути проблем и более глубокому пониманию способов их решения. Разнообразие способов решения конкретной задачи в группе и их анализ позволяет развивать такие качества мышления школьников как креативность и рациональность.

Уровень усвоения методов решения задач курса проверяется на итоговом зачёте. Слушатели курса получают оценку «зачтено» при правильном решении 3-х из 4-х предложенных задач итогового зачёта (Приложение 2). Правильное решение задачи №4 итогового зачета свидетельствует о повышенном уровне освоения содержания элективного курса.

Учебно-тематический план

10 класс

Раздел	Количество учебных часов	Контрольные работы (стандартизированные), лабораторные работы,

		практические работы
Введение	1	-
Тема 1. Линейные уравнения с параметрами	3	
Тема 2. Квадратные уравнения с параметрами	5	
Тема 3. Линейные неравенства с параметрами	2	
Тема 4. Квадратные неравенства с параметрами	2	
Тема 5. Функционально-графические методы решения задач с параметрами	2	
Итоговый зачет по курсу	2	2
Итого	17	2

Содержание курса

Введение (1 час)

Обобщение и систематизация представлений о типах рациональных уравнений и методах их решений. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Дробно-рациональное уравнение. Область определения уравнения.

Уравнения с параметрами. Параметр. Область допустимых значений параметра. Контрольное значение параметра. Решение уравнения с параметром. Решить уравнение с параметром. Общая схема решения задач с параметром.

Тема 1. Линейные уравнения с параметрами (3 часа)

Линейные уравнения с параметрами. Алгоритм решения линейных уравнений с параметрами. Область допустимых значений и контрольные значения параметра в линейных уравнениях. Решение линейных уравнений с параметрами. Ключевые моменты в решении уравнений с параметрами (выделение контрольных значений параметра; разбиение области допустимых значений параметра на подмножества; классификация решений уравнения с параметром). Зависимость количества корней от коэффициентов а и b. Решение уравнений с параметрами при наличии дополнительных условий к корням уравнения. Решение уравнений с параметрами, приводимых к линейным.

Тема 2. Квадратные уравнения с параметрами (5 часов)

Понятие квадратного уравнения с параметрами. Алгоритмическое предписание решения квадратных уравнений с параметрами. Зависимость количества корней уравнения от коэффициента a и дискриминанта. Область допустимых значений и контрольные значения параметра в квадратных уравнениях. Графический способ решения квадратных уравнений с параметром. Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром. Решение квадратных уравнений при дополнительных условиях к корням уравнений. Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданной точки. Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратного трехчлена.

Уравнения с параметрами, приводимые к квадратным.

Тема 3. Линейные неравенства с параметрами (2 часа)

Линейные неравенства с параметрами. Схема решения линейных неравенств с параметрами. Область допустимых значений и контрольные значения параметра в линейных неравенствах.

Решение линейных неравенств с параметрами. Зависимость решений от коэффициентов a и b. Решение неравенств с параметрами, приводимых к линейным.

Тема 4. Квадратные неравенства с параметрами (2 часа)

Понятие квадратного неравенства с параметром. Схема решения квадратных неравенств с параметрами. Зависимость решений от коэффициента *a* и дискриминанта. Графический способ решения квадратных неравенств с параметрами. Решение квадратных неравенств с параметрами при дополнительных условиях к корням соответствующих уравнений. Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратного трехчлена. Решение квадратных неравенств с параметром методом интервалов. Решение неравенств с параметрами, приводимых к квадратным.

Тема 5. Функционально-графические методы решения задач с параметрами (2 часа)

Специфика функционально-графического метода решения задач с параметрами. Решение линейных и квадратных неравенств с параметрами функционально-графическим методом. Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами.

Итоговый зачет по курсу (2часа)

Параметр. Область допустимых значений параметра. Контрольное значение параметра.
Общая схема решения задач с параметрами.
Решение квадратных неравенств с параметрами при дополнительных условиях к корням соответствующих уравнений.
Специфика графического метода решения задач с параметрами. Решение линейных и квадратных неравенств с параметрами графическим методом.
Решение квадратных уравнений при дополнительных условиях к корням уравнений.
Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратного трехчлена.

Планируемые результаты

ЛИЧНОСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ:

1)эстетического воспитания: эстетическое отношение к миру, включая эстетику математических закономерностей, объектов, задач, решений, рассуждений:

2) ценности научного познания: сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, понимание математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладение языком математики и математической культурой как средством познания мира, готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность. индивидуально и в группе.

МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Познавательные универсальные учебные действия
Базовые логические действия: выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятиями, формулировать определения понятий, устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа;

воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие, условные;

выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях, предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий;

делать выводы с использованием законов логики, дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии;

проводить самостоятельно доказательства математических утверждений (прямые и от противного), выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры, обосновывать собственные суждения и выводы;

выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учётом самостоятельно выделенных критериев).

Базовые исследовательские действия:

использовать вопросы как исследовательский инструмент познания, формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение;

проводить самостоятельно исследование по установлению особенностей математического объекта, явления, процесса, выявлению зависимостей между объектами, явлениями, процессами;

самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений;

прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.

Работа с информацией:

выявлять дефициты информации, данных, необходимых для ответа на вопрос и для решения задачи;

структурировать информацию, представлять её в различных формах, иллюстрировать графически;

оценивать надёжность информации по самостоятельно сформулированным критериям.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Общение:

воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения, ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат;

в ходе обсуждения задавать вопросы по существу обсуждаемой темы, проблемы, решаемой задачи, высказывать идеи, нацеленные на поиск решения, сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога, обнаруживать различие и сходство позиций, в корректной форме формулировать разногласия, свои возражения;

представлять результаты решения задачи.

Регулятивные универсальные учебные действия

Самоорганизация:

составлять план, алгоритм решения задачи, выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей, аргументировать и корректировать варианты решений с учётом новой информации.

Самоконтроль, эмоциональный интеллект:

владеть навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов, владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи;

предвидеть трудности, которые могут возникнуть при решении задачи, вносить коррективы в деятельность на основе новых обстоятельств, данных, найденных ошибок, выявленных трудностей;

оценивать соответствие результата цели и условиям, объяснять причины достижения или недостижения результатов деятельности, находить ошибку, давать оценку приобретённому опыту.

Совместная деятельность:

понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы при решении учебных задач, принимать цель совместной деятельности, планировать организацию совместной работы, распределять виды работ, договариваться, обсуждать процесс и результат работы, обобщать мнения нескольких людей;

участвовать в групповых формах работы (обсуждения, обмен мнений, «мозговые штурмы» и иные), выполнять свою часть работы и координировать свои действия с другими членами команды, оценивать качество своего вклада в общий продукт по критериям, сформулированным участниками взаимодействия.

ПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

К концу обучения в **10 классе** обучающийся получит следующие предметные результаты по отдельным темам рабочей программы учебного курса «Алгебра и начала математического анализа»:

Числа и вычисления:

свободно оперировать понятиями: рациональное число, бесконечная периодическая дробь, проценты, иррациональное число, множества рациональных и действительных чисел, модуль действительного числа;

применять приближённые вычисления, правила округления, прикидку и оценку результата вычислений;

свободно оперировать понятием: степень с целым показателем, использовать подходящую форму записи действительных чисел для решения практических задач и представления данных;

свободно оперировать понятием: арифметический корень натуральной степени;

свободно оперировать понятием: степень с рациональным показателем;

свободно оперировать понятиями: логарифм числа, десятичные и натуральные логарифмы;

свободно оперировать понятиями: синус, косинус, тангенс, котангенс числового аргумента.

Уравнения и неравенства:

свободно оперировать понятиями: уравнение, неравенство, равносильные уравнения и уравнения-следствия, равносильные неравенства;

применять различные методы решения рациональных и дробно-рациональных уравнений, применять метод интервалов для решения неравенств;

использовать свойства действий с корнями для преобразования выражений;

моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Функции и графики:

свободно оперировать понятиями: функция, способы задания функции, взаимно обратные функции, композиция функций, график функции, выполнять элементарные преобразования графиков функций;

свободно оперировать понятиями: область определения и множество значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства;

свободно оперировать понятиями: чётные и нечётные функции, периодические функции, промежутки монотонности функции, максимумы и минимумы функции, наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке;

оперировать понятиями: линейная, квадратичная и дробно-линейная функции, выполнять элементарное исследование и построение их графиков;

использовать графики функций для исследования процессов и зависимостей при решении задач, выражать формулами зависимости между величинами;

Начала математического анализа:

свободно оперировать понятиями: непрерывные функции, точки разрыва графика функции, асимптоты графика функции;

свободно оперировать понятием: функция, непрерывная на отрезке, применять свойства непрерывных функций для решения задач;

Множества и логика:

свободно оперировать понятиями: множество, операции над множествами;

свободно оперировать понятиями: определение, теорема, уравнение-следствие, свойство математического объекта, доказательство, равносильные уравнения и неравенства.

Список литературы

1. Айвазян, Д.Ф. Математика 10-11 классы. Решение уравнений и неравенств с параметрами. / авт-сост.Д.Ф. Айвазян.- Волгоград: Учитель, 2009.-204с.
2. Амелькин, В.В. Задачи с параметрами/ В.В. Амелькин, В.Л.Рабцевич.- М.:Асар,1996,504с.
3. Горнштейн П.И. и др. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2003.
4. Жаржевский А.Я., Фельдман Я.С. Математика. Решение задач с параметрами. С. – Петербург: Агенство ИГРЕК, 1995.
5. Изучение сложных тем курса алгебры в средней школе: учебно-методические материалы по математике /Под ред. Л.Я.Фальке. – М.: Народное образование; Илекса; Ставрополь: Сервисшкола, 2005
6. Карп А.П., Некрасов В.Б. Задания по алгебре и началам анализа для организации итогового повторения и проведения аттестации в 11 классе. – М.: Просвещение, 2003.
7. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики. – М.: Мир и Образование, 2005.
8. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: пособие для учащихся общеобразоват. учреждений (элективные курсы)/С.М. Никольский. – М.: Просвещение, 2010
9. Никольский СМ., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровень).10 класс. – М.: Просвещение, 2018.
10. Полякова, Е.А. Уравнения и неравенства с параметрами в профильном 11 классе./ Е.А. Полякова .- М.: ИЛЕКСА, 2010.-96с.
11. Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения. – М.: Илекса, Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2005
12. Цыганов, Ш Квадратные трехчлены и параметры./ Ш.Цыганов.Математика.-1999.-№5. с 4-9.
13. Шестаков С.А., Юрченко Е.В. Уравнения с параметрами. – М.: СЛОГ, 1993.
14. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами. – М.: Просвещение, 1986.

Приложение 1. Упражнения для анализа способа решения уравнений и неравенств с параметрами.

Пример 1. Решите уравнение $a(a-5)x = 6(x-1)+a$.

Решение. Область допустимых значений параметра в данном уравнении –R. Преобразуем данное уравнение к равносильному уравнению вида $f(a)\cdot x = =g(a)$:

$(a^2 – 5a –6)\, x = a –6,$

$(a – 6)\,(a+1)\, x = a-6.$ (*).

Контрольные значения параметра : $a = - 1;\ a =6.$

Разобьём область значений параметра на подмножества: 1) $A_1 = \{- 1\};$ 2) $A_2 = \{6\};$ 3) $A_3 = (-\infty; -1) U (-1;6) U (6; \infty)$ и решим уравнение (*) на каждом из подмножеств.

1) При $a= - 1$ уравнение (*) не имеет корней;
2) При $a= 6$ корнем уравнения (*) является любое действительное число;
3) При $\begin{cases} a \neq -1, \\ a \neq 6 \end{cases}$ уравнение (*) имеет единственный корень $x=\frac{1}{a+1}$.

Ответ. При $a = - 1$ корней нет;

При $a = 6$ $x \in R;$

При $\begin{cases} a \neq -1, \\ a \neq 6 \end{cases}$ $x = \frac{1}{a+1}$.

Пример 2. Решите уравнение

$$ax^2+4ax+3 = x^2+2x-4.$$

Решение. Область допустимых значений параметра в данном уравнении – R. Преобразуем данное уравнение к равносильному уравнению вида

$$f(a)x^2 + g(a)x + h(a)=0:$$

$$(a-1)x^2+2(2a-1)x+(4a+3)=0 \qquad (*).$$

Найдём контрольные значения параметра a.

1) $f(a) =0$ при $a=1.$

2) Из области изменения параметра $a \neq 1$ выделим те значения, при которых дискриминант уравнения (*) обращается в нуль :

$\frac{D}{4} = (2a+1)^2 - (a-1)(4a+3),\ \frac{D}{4} = 5a+4.$

$\frac{D}{4} = 0$ при $5a+4=0,$

$$a= -\frac{4}{5}.$$

$-\frac{4}{5}$ – второе контрольное значение параметра. Разобьём область значений параметра на подмножества, учитывая выводы:

если $a < -\frac{4}{5}$, *то* $D<0$,

если $\begin{cases} a \geq -\frac{4}{5}, \\ a \neq 1, \text{ то } D \geq 0. \end{cases}$

$A_1 = (-\infty; -\frac{4}{5})$; $A_2 = [-\frac{4}{5}; 1) \cup (1;\infty)$, $A_3=\{1\}$.

Решим уравнение (*) на каждом из подмножеств A_1, A_2, A_3.

1) При $a < -\frac{4}{5}$ уравнение (*) не имеет действительных корней.

2) При $\begin{cases} a \geq -\frac{4}{5}, \\ a \neq 1 \end{cases}$ $\qquad x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$

3) При $a = 1$ уравнение (*) примет вид : $6x+7=0$,

$$x = -1\frac{1}{6}.$$

Ответ. При $a < -\frac{4}{5}$ корней нет;

При $a \in \left[-\frac{4}{5};1\right] \cup (1;\infty)$ $\quad x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$;

При $a = 1$ $\quad x = -1\frac{1}{6}$.

Пример 3. Решите уравнение $\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$ (1).

Решение. Контрольным значением параметра будет $a=0$, не являющееся допустимым в данном дробно – рациональном уравнении. Следовательно, при $a=0$ данное уравнение не имеет корней.

Рассмотрим значения параметра $a \neq 0$ и преобразуем данное уравнение к виду $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0$: $x^2+2(1-a)x+a^2-2a-3=0$ (2)

Уравнение (2) не является равносильным данному в силу изменения области допустимых значений переменной x, поэтому необходима проверка корней. Найдём дискриминант уравнения (2) :

$\frac{D}{4} = (1-a)^2 - (a^2-2a-3)$; $\quad \frac{D}{4} = 4$, поэтому другие контрольные значения параметра а, кроме $a=0$, в уравнении (2) не выявлены и оно имеет два действительных корня :

$x_1 = a+1$; $x_2 = a-3$.

Выполним проверку корней. Из найденных значений x следует исключить не входящие в область допустимых значений переменной :

$\begin{cases} x+1\neq 0, \\ x+2\neq 0, \end{cases}$ *т.е.* $x_1+1=0,\ x_1+2=0,\ x_2+1=0,\ x_2+2=0.$

1) $x_1+1 = 0$, *т.е.* $(a+1)+1=0$, $a= -2$.

При $a =-2$ x_1 не является корнем уравнения (1).

2) $x_1+2=0$, *т.е.* $(a+1)+2=0$, $a= - 3$.

При $a = -3$ x_1 не является корнем уравнения (1).

3) $x_2+1=0$, т.е. $(a-3)+1= 0$, $a=2$.

При $a= 2$ x_2 не является корнем уравнения (1).

4) $x_2+2=0$, *т.е.* $(a-3)+2=0$, $a=1$.

При $a= 1$ x_2 не является корнем уравнения (1).

Ответ. При $a= -3$ $x= - 6;$

При $a= -2$ $x= -5;$

При $a=0$ корней нет;

При $a=1$ $x = 2;$

При $a=2$ $x = 3;$

При $a \notin \{-3;-2;0;1;2\}$ $x_1= a+1;\ x_2 =a-3.$

Пример 4. Решите неравенство $2a(a-2)x > a-2$.

Решение.

Контрольные значения параметра: $a=0;2$.

Рассмотрим данное неравенство в каждом из пяти случаев: 1) $a<0;$ 2) $a=0;$ 3) $0<a<2;$ 4) $a=2;$ 5) $a>2$.

1) При $a<0$ $2a(a-2)>0$, данное неравенство преобразуется к виду: $x>\frac{a-2}{2a(a-2)}$, $x>\frac{1}{2a}$.
2) При $a=0$ данное неравенство примет вид: $0\cdot x>-2$, что верно при $x\in R$.
3) При $0<a<2$ $2a(a-2)<0$, данное неравенство преобразуется к виду: $x<\frac{a-2}{2a(a-2)}$, $x<\frac{1}{2a}$.
4) При $a=2$ данное неравенство примет вид: $0\cdot x>0$, что не выполняется ни при каких значениях x.
5) При $a>2$ $2a(a-2)>0$ и $x>\frac{1}{2a}$.

Ответ. При $a<0,\ a>2$ $x>\frac{1}{2a};$

при $a=0$ $x \in R$;

при $0<a<2$ $x<\frac{1}{2a}$;

при $a=2$ решений нет.

Пример 5. Решите неравенство: $(a-1)x^2+2(2a+1)x+(4a+3)\le 0$.

Решение.

Первое контрольное значение параметра: $a=1$.

Для нахождения второго контрольного значения параметра а найдем значение $\frac{D}{4}$: $\frac{D}{4}=(2a+1)^2-(a-1)(4a+3)=5a+4$.

$\frac{D}{4}=0$ *при* $a=-\frac{4}{5}$.

Данное неравенство рассмотрим в каждом из пяти случаев: 1) $a<-\frac{4}{5}$; 2) $a=-\frac{4}{5}$; 3) $-\frac{4}{5}<a<1$; 4) $a=1$; 5) $a>1$.

1) При $a<-\frac{4}{5}$ $\frac{D}{4}<0$, $a-1<0$, т.е. данное неравенство верно при $x \in R$.

2) При $a=-\frac{4}{5}$ данное неравенство примет вид: $-\frac{9}{5}x^2-\frac{6}{5}x-\frac{1}{5}\le 0$,

$$9x^2+6x+1\ge 0,$$

$$(3x+1)^2\ge 0.$$

Полученное неравенство верно при $x \in R$.

3) При $-\frac{4}{5}<a<1$ $\frac{D}{4}>0$. Вычислив корни квадратного трехчлена:

$x_1=\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1}$; $x_2=\frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$, преобразуем данное неравенство к виду: $(a-1)(x-x_1)(x-x_2)\le 0$, $a-1<0$,

$$(x-x_1)(x-x_2)\ge 0. \quad (1)$$

Очевидно, что:

$$-(2a+1)+\sqrt{5a+4} > -(2a+1)-\sqrt{5a+4}.$$

Разделим обе части этого неравенства на число $(a-1)<0$:

$$\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1}<\frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$$, т.е. $x_1<x_2$.

Решение неравенства (1):

$$x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;\infty).$$

4) При $a=1$ данное неравенство примет вид: $6x+7\le 0$, т.е. $x\le -\frac{7}{6}$.

5) При $a>1$ $\frac{D}{4}>0$ и данное неравенство преобразуется к виду:

$(a-1)(x-x_1)(x-x_2)\le 0,$

где $x_1=\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1}$, $x_2=\frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Учитывая, что $a-1>0$, получим:

$(x-x_1)(x-x_2)\le 0$ и $\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1}>\frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$, т.е. $x_1>x_2$.

Решение данного неравенства в этом случае имеет вид: $x_2\le x\le x_1$.

Ответ. При $a\le -\frac{4}{5}$ $x\in R;$

при $-\frac{4}{5}<a<1$ $x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;\infty);$

при $a=1$ $x\in(-\infty;-\frac{7}{6}];$

при $a>1$ $x\in[x_2;x_1]$, где $x_1=\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1}$, $x_2=\frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Пример 6. Решите неравенство $\frac{x^2+1}{a^2x-2a}-\frac{1}{2-ax}>\frac{x}{a}$.

Решение.

Заменим данное неравенство равносильными: $\frac{x^2+1}{a(ax-2)}+\frac{1}{ax-2}-\frac{x}{a}>0,$

$$\frac{(1-a)x^2+2x+1+a}{a^2(x-\frac{2}{a})}>0. \quad (1)$$

Первое контрольное значение параметра: $a=0.$

Найдем второе контрольное значение параметра: $1-a=0,\ a=1.$

Другие контрольное значение параметра найдем из условия: $D=0.$

(D –дискриминант квадратного трехчлена $(1-a)x^2+2x+1+a).$

$D=a^2$, $D=0$ при $a=0.$ Такое контрольное значение параметра уже отмечено.

Рассмотрим решение неравенства (1) в каждом из трех случаев: 1) $a=1$; 2) $a=0;$ 3) $\begin{cases} a\ne 0, \\ a\ne 1. \end{cases}$

1) При $a=1$ неравенство (1) примет вид:

$\frac{2x+2}{x-2}>0,\ x\in(-\infty;-1)\cup(2;\infty).$

2) При $a=0$ неравенство (1) не имеет решений.

3) При $\begin{cases} a\ne 0, \\ a\ne 1 \end{cases}$ преобразуем неравенство (1) к виду:

$$\frac{(1-a)(x+1)(x-\frac{a+1}{a-1})}{x-\frac{2}{a}}>0. \qquad (2)$$

Полученное неравенство равносильно неравенству (1), а значит, и данному неравенству.

Неравенство (2) рассмотрим в двух случаях:

1) $\begin{cases} a\neq 0, \\ a<1 \end{cases}$ 2) $a>1.$

1) При $\begin{cases} a\neq 0, \\ a<1 \end{cases}$ $1-a>0$ и неравенство (2) примет вид:

$$\frac{(x+1)(x-\frac{a+1}{a-1})}{x-\frac{2}{a}}>0. \qquad (3)$$

2) При $a>1$ $1-a<0$ и неравенство (2) примет вид:

$$\frac{(x+1)(x-\frac{a+1}{a-1})}{x-\frac{2}{a}}<0. \qquad (4)$$

Для решения неравенств (3) и (4) методом интервалов расположим числа $-1;\ \frac{a+1}{a-1};\ \frac{2}{a}$ в порядке возрастания. Для этого составим разности:

$A_1=\frac{a+1}{a-1}-(-1);\ \ A_2=\frac{2}{a}-(-1);\ \ A_3=\frac{a+1}{a-1}-\frac{2}{a}.$

Рассмотрим знак разности $A_1=\frac{2a}{a-1}:$

при $a<0$ $A_1>0$, при $0<a<1$ $A_1<0$, при $a>1$ $A_1>0.$

Аналогично $A_2=\frac{2+a}{a}:$

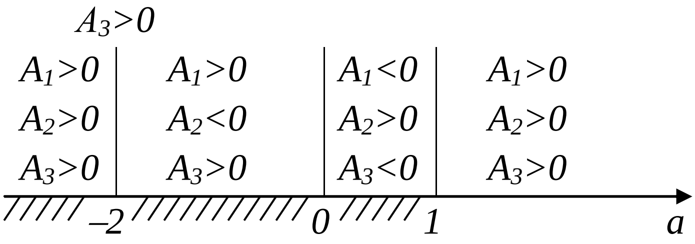
при $a<-2$ $A_2>0$; при $-2<a<0$ $A_2<0;$ при $0<a<1,\ a>1$ $A_2>0;$ при $a=-2$ $A_2=0.$

Рассмотрим разность $A_3=\frac{a^2-a+2}{a(a-1)}.$

Дискриминант квадратного трехчлена a^2-a+2 отрицателен, а коэффициент при a^2 положителен, тогда $a^2-a+2>0$ при любых значениях а и знак A_3 зависит от знака знаменателя $a(a-1).$ При $a<0$ $A_3>0$; при $0<a<1$ $A_3<0$; при $a>0$ $A_3>0.$

Представим в виде схемы результаты исследования знаков разностей в зависимости от значения параметра а:

$A_2=0$



Неравенство (3) решается при условии $a\neq 0,\ a<1$. Поэтому нужно рассмотреть неравенство (3) в каждом из четырех случаев: 1) $a<-2$; 2) $-2<a<0$; 3) $0<a<1;$
4) $a=-2$.

В случаях (1) – (3) получаем соответственно: $-1<\frac{2}{a}<\frac{a+1}{a-1};\quad \frac{2}{a}<-1<\frac{a+1}{a-1};$

$\frac{a+1}{a-1}<-1<\frac{2}{a}$.

Решая неравенство (3) методом интервалов, получаем:

при $a<-2\ \ x\in(-1;\ \frac{2}{a})\cup(\frac{a+1}{a-1};\infty);$

при $-2<a<0\ \ x\in(\frac{2}{a};-1)\cup(\frac{a+1}{a-1};\infty);$

при $0<a<1\ \ x\in(\frac{a+1}{a-1};-1)\cup(\frac{2}{a};\infty).$

4) При $a=-2$ неравенство (3) примет вид:

$$\frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})}{x+1}>0,\ \ x\in(-\frac{1}{3};\infty).$$

При решении неравенства (4), учитывая знаки разностей A_1,A_2,A_3 при $a>1$ (см. графическую иллюстрацию), имеем: $-1<\frac{2}{a}<\frac{a+1}{a-1}$.

С помощью метода интервалов находим решение неравенства (4):

$x\in(-\infty;-1)\cup(\frac{2}{a};\frac{a+1}{a-1}).$

Ответ. При $a<-2\ \ x\in(-1;\ \frac{2}{a})\cup(\frac{a+1}{a-1};\infty);$

при $a=-2\ \ x\in(-\frac{1}{3};\infty);$

при $-2<a<0$ $x\in(\frac{2}{a};-1)\cup(\frac{a+1}{a-1};\infty)$;

при a=0 решений нет;

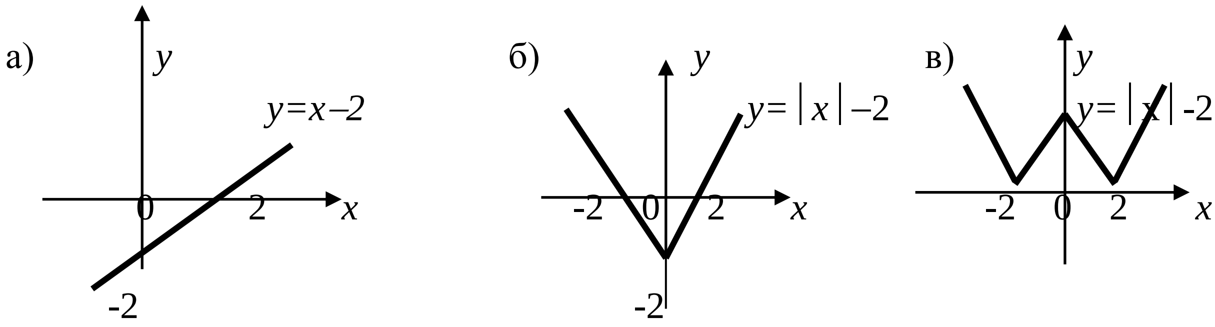
при $0<a<1$ $x\in(\frac{a+1}{a-1};-1)\cup(\frac{2}{a};\infty)$;

при a=1 $x\in(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$;

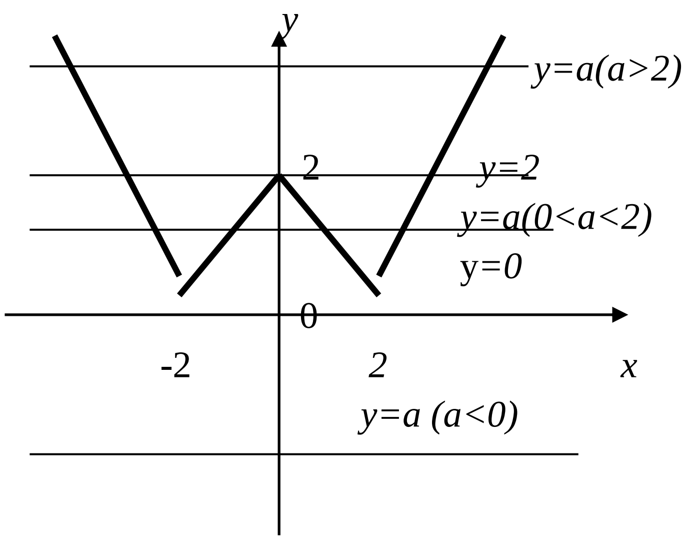
при a>1 $x\in(-\infty;-1)\cup(\frac{2}{a};\frac{a+1}{a-1})$.

Пример 7. Сколько корней имеет уравнение $||x|-2|=a$ при различных значениях параметра *a* ?

Решение. Построим график функции $y=||x|-2|$.



Прямая $y = a$ не пересекает график (в) при $a<0$,
имеет с ним две точки пересечения при $a = 0$: $x_1=2$; $x_2= -2$;
имеет четыре точки пересечения при $0<a<2$;
имеет три точки пересечения при $a=2$;
имеет две точки пересечения при $a>2$ (рисунок г).



Ответ. При $a< 0$ корней нет ;

при $a= 0$ уравнение имеет два корня;

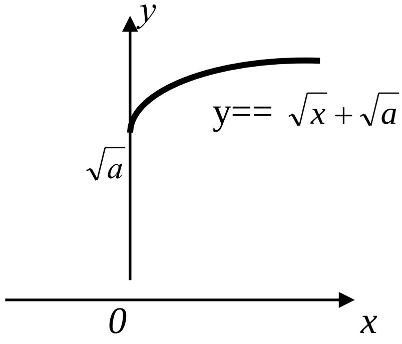
при $a=2$ три корня;

при $0<a<2$ четыре корня.

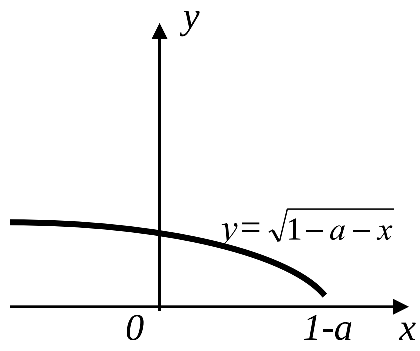
Пример2. Решите уравнение : $\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{1-(x+a)}$.

Решение. Построим графики функций $y = \sqrt{x}+\sqrt{a}$ (1) и $y = \sqrt{1-(x+a)}$ (2):

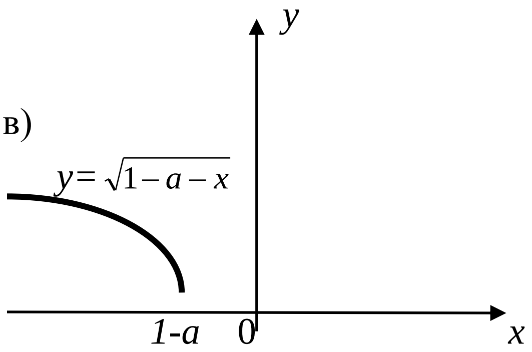
а)



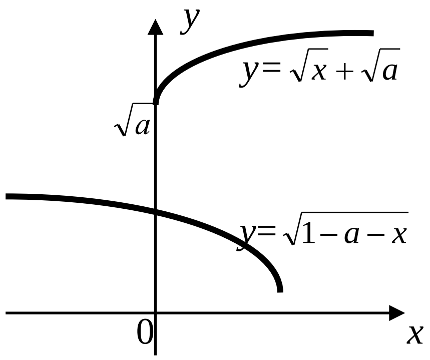
б)



в)



г)



Данное уравнение не имеет корней, если графики функций (1) и (2) не пересекаются. Это происходит при $a<0$, т.к. функция (1) не определена; при $a\geq1$ (график функции (2) соответствует рисунку (в)) графики функций расположены в разных координатных четвертях, а также в том случае, когда точка пересечения графика функции (2) с осью y (эта точка существует при $a\leq1$) лежит ниже точки $\sqrt{a}$ на оси у (рис. г). График функции у = $\sqrt{1-a-x}$ пересекает ось у в точке $\sqrt{1-a}$. Значит, уравнение не имеет корней при

$\sqrt{1-a} < \sqrt{a}$, т.е.

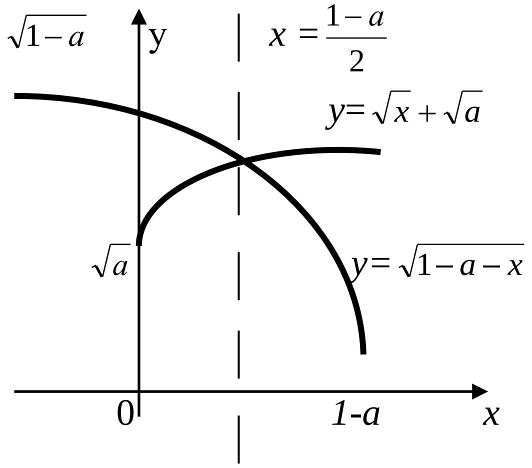
$1-a < a,$

$a < \frac{1}{2}$.

Учитывая, что в рассматриваемом случае а≤1, заключаем, что при $\frac{1}{2}$ <π а ≤1 данное уравнение также не имеет корней. Таким образом, уравнение не имеет корней, если a<0 или a>$\frac{1}{2}$;

если 0≤a≤$\frac{1}{2}$, то уравнение имеет единственный корень (рис. (д)).

д)



Решая иррациональное уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{1-(x+a)}$, находим :

$x_1, x_2 = \frac{1-a \pm \sqrt{2a-3a^2}}{2}$. Одно из найденных значений x не является корнем уравнения. При $x = \frac{1-a}{2}$ функция $y = \sqrt{x} + \sqrt{a}$ принимает значение $\sqrt{\frac{1-a}{2}} + \sqrt{a}$; в той же точке функция $y = \sqrt{1-a-x}$ принимает значение $\sqrt{\frac{1-a}{2}}$. Значение второй функции меньше – значит, точка пересечения графиков этих функций расположена левее прямой $x = \frac{1-a}{2}$. Таким образом, корнем данного уравнения является меньшее значение $x_1 = \frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$, а

$x_2 = \frac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}$ не является корнем.

Ответ. При $a<0$, $a>\frac{1}{2}$ уравнение не имеет корней;

при 0≤a≤$\frac{1}{2}$ $x = \frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$.

Приложение 2. Задания для самостоятельной работы.

«Линейные уравнения с параметрами»

1. Решите уравнение: $a(a-3)x = 10(2a+x)$.

2. Решите уравнение : а) $\frac{x^2-4}{x-a}=0$; б) $\frac{ax-4-x}{x^2-9}=0$.

«Квадратные уравнения с параметрами»

1. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $2x^2+2(a-1)x+2a^2-3=0$ будет наибольшей ?

2.Решите уравнение $x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$.

«Линейные неравенства с параметрами»

Вариант – 1.

1. Найдите все положительные значения параметра а, при каждом из которых для любого числа из отрезка $[-2;2]$ верно неравенство $|3x+a|x|-11|\geq 3$.

Вариант – 2.

1. Найдите все положительные значения параметра а, при каждом из которых множество решений неравенства $|ax+3|x|-5|<1$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 10 и при этом содержится в некотором отрезке длиной 20.

«Квадратные неравенства с параметрами»

Вариант – 1.

1. При каких значениях параметра а неравенство $x^2-2ax+9>0$ выполняется при всех значениях x ?
2. При каких значениях параметра а неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a}<0$ выполняется для всех значений х отрезка [1;2] ?
3. Найдите все значения параметра а, при которых множество решений неравенства $x(x-6)\leq(a+3)(|x-3|-3)$ содержит число, равное сумме корней уравнения $x^2-4x+1=0$.

Вариант – 2.

1.При каких значениях параметра а неравенство $ax^2+2(a+1)x+2a+2\leq 0$ выполняется при всех значениях x ?

2.При каких значениях параметра b неравенство $\frac{3b-1-x}{x+b}>0$ выполняется для всех значений х из отрезка $[-1;3]$?

3.Найдите все значения параметра а, при которых множество решений неравенства $x(x-5)\le(2a+1)(|x-2{,}5|-2{,}5)$ содержит число, равное сумме кубов корней уравнения $x^2-5x+2=0$.

«Функционально-графический метод решения задач с параметрами»

1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{4-x^2}=x+a$ при различных значениях параметра a ?
2. Решите уравнение $\sqrt{x}=x-a$.
3. При каких значениях параметра а число корней уравнения $||x^2-2x|-7|=a$ в четыре раза больше a ?
4. Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $(2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ имеет хотя бы один корень, и число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения $\dfrac{2x+1}{21-p}=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.

Приложение 3. Задания для итогового зачета по курсу.

1.Решите уравнение $(a^2 - 1)x = a + 1$.

2.При каких значениях a уравнение $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ имеет более одного корня?

3.При каких значениях параметра a в множестве решений неравенства $(x-1)(x-a) \leq 0$ содержится пять целых чисел?

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{x^4 - 4x^2 + 9a^2} = x^2 + 2x - 3a$ имеет ровно 3 решения.

Календарно-тематическое планирование

№ урока	Наименование разделов и тем	Календарные сроки		Основное содержание	Формы и методы урока, виды деятельности	Оборудование, контрольно-измерительные материалы
		Плановые	*Фактические*			
	Введение (1 час)					
1.	Понятие уравнения с параметром. Рациональные уравнения с параметрами			Обобщение и систематизация представлений о типах рациональных уравнений и методах их решений. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Дробно-рациональное уравнение. Область определения уравнения. Уравнения с параметрами. Параметр. Область допустимых значений параметра. Контрольное значение параметра. Решение уравнения с параметром. Решить уравнение с параметром. Общая схема решения задач с параметром.	Эвристическая беседа. Фронтальная и индивидуальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Практикум по решению задач. Работа в парах.	Приложение 1, МП «Схема решения задачи с параметром»
Линейные уравнения с параметрами (3 часа)						

2.	Линейные уравнения с параметрами.			Линейные уравнения с параметрами. Алгоритм решения линейных уравнений с параметрами. Область допустимых значений и контрольные значения параметра в линейных уравнениях. Решение линейных уравнений с параметрами. Ключевые моменты в решении уравнений с параметрами (выделение контрольных значений параметра; разбиение области допустимых значений параметра на подмножества; классификация решений уравнения с параметром).	Лекция. Фронтальная и индивидуальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Практикум по решению задач.	Приложение 2, МП «Схема решения задачи с параметром»
3.	Линейные уравнения с параметрами с дополнительными условиями для корней			Решение линейных уравнений с параметрами. Ключевые моменты в решении уравнений с параметрами (выделение контрольных значений параметра; разбиение области допустимых значений параметра на подмножества; классификация решений уравнения с параметром). Зависимость количества корней от коэффициентов a и b. Решение уравнений с параметрами при наличии дополнительных условий к корням уравнения.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Обучающая самостоятельная работа. Групповая форма. Анализ результатов работы	Приложение 2, карточки-задания для групп

4.	Уравнения с параметром, приводимые к линейным			Решение уравнений с параметрами, приводимых к линейным.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Обучающая самостоятельная работа с консультантами.	Приложения 1-2, МП «Схема решения задачи с параметром»
Квадратные уравнения с параметрами (5 часов)						

5.	Квадратные уравнения с параметрами			• Понятие квадратного уравнения с параметрами. • Алгоритмическое предписание решения квадратных уравнений с параметрами. • Зависимость количества корней уравнения от коэффициента *а* и дискриминанта. • Область допустимых значений и контрольные значения параметра в квадратных уравнениях. • Графический способ решения квадратных уравнений с параметром. • Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданной точки.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Практикум по решению задач.	Приложение 2, МП «Схема решения задачи с параметром»

6.	Уравнения с параметрами, приводимые к квадратным			• Уравнения с параметрами, приводимые к квадратным. • Графический способ решения квадратных уравнений с параметром. • Решение квадратных уравнений при дополнительных условиях к корням уравнений.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Обучающая самостоятельная работа. Групповая форма. Анализ результатов работы.	Приложение 2, МП «Схема решения задачи с параметром», карточки-задания для групп
7.	Решение квадратных уравнений с помощью теоремы Виета			• Зависимость количества корней уравнения от коэффициента *a* и дискриминанта. • Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром. • Решение квадратных уравнений при дополнительных условиях к корням уравнений.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Практикум по решению задач.	Приложения1-2

8.	Задачи, связанные с исследованием корней квадратного трехчлена			• Зависимость количества корней уравнения от коэффициента *a* и дискриминанта. • Решение квадратных уравнений при дополнительных условиях к корням уравнений.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Самостоятельная работа со справочной литературой. Практикум по решению задач.	ИД, [1] Справочная литература (1,3),
9.	Задачи, связанные с исследованием корней квадратного трехчлена			• Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратного трехчлена. • Решение квадратных уравнений при дополнительных условиях к корням уравнений.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Обучающая самостоятельная работа. Групповая форма. Анализ результатов работы.	ИД, [1], МП «Схема решения задачи с параметром», карточки-задания для групп карточки-задания для групп
Линейные неравенства с параметрами (2 часа)						

10.	Линейные неравенства с параметрами			• Линейные неравенства с параметрами. • Схема решения линейных неравенств с параметрами. • Область допустимых значений и контрольные значения параметра в линейных неравенствах. • Решение линейных неравенств с параметрами.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Обучающая самостоятельная работа с консультантами.	Приложение 1, ИД, [1], МП «Схема решения задачи с параметром»,
11.	Линейные неравенства с параметрами и неравенства, приводимые к линейным.			• Решение линейных неравенств с параметрами. Зависимость решений от коэффициентов a и b. • Решение неравенств с параметрами, приводимых к линейным.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Обучающая самостоятельная работа. Групповая форма. Анализ результатов работы.	Приложение 2, ИД, [1], карточки-задания для групп
Квадратные неравенства с параметрами (2 часа)						

12.	Квадратные неравенства с параметрами			• Понятие квадратного неравенства с параметром. • Схема решения квадратных неравенств с параметрами. Зависимость решений от коэффициента *a* и дискриминанта. • Графический способ решения квадратных неравенств с параметрами. • Решение квадратных неравенств с параметрами методом интервалов	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Обучающая самостоятельная работа в парах.	Приложение 2, ИД, [1], МП «Схема решения задачи с параметром»
13.	Решение неравенств с параметрами, приводимых к квадратным.			• Решение квадратных неравенств с параметрами при дополнительных условиях к корням соответствующих уравнений. • Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратного трехчлена. • Решение квадратных неравенств с параметром методом интервалов. • Решение неравенств с параметрами, приводимых к квадратным.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Обучающая самостоятельная работа. Групповая форма. Анализ результатов работы.	Приложения 1-2, ИД, [1], карточки-задания для групп
Функционально-графический метод решения задач с параметрами (2 часа)						

14.	Функционально-графический метод решения задач с параметрами.			• Специфика функционально-графического метода решения задач с параметрами. • Решение линейных и квадратных неравенств с параметрами функционально-графическим методом. • Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Обучающая самостоятельная работа в парах.	Приложения 1-2, ИД, [1], МП «Схема решения задачи с параметром»
15.	Функционально-графический метод решения задач с параметрами.			• Специфика функционально-графического метода решения задач с параметрами. • Решение линейных и квадратных неравенств с параметрами функционально-графическим методом. • Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами.	Эвристическая беседа. Фронтальная работа на этапе актуализации знаний по теме и введения новых знаний. Обучающая самостоятельная работа. Групповая форма. Анализ результатов работы.	Приложение 2, ИД, [1], МП «Схема решения задачи с параметром», карточки-задания для групп

16	Итоговый зачет по курсу.			• Параметр. Область допустимых значений параметра. Контрольное значение параметра. • Решение квадратных уравнений при дополнительных условиях к корням уравнений. • Решение квадратных неравенств с параметрами при дополнительных условиях к корням соответствующих уравнений.	Письменная контрольная работа.	Приложение 3
17.	Итоговый зачет по курсу.			• Специфика графического метода решения задач с параметрами. Решение линейных и квадратных неравенств с параметрами графическим методом. • Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратного трехчлена. • Общая схема решения задач с параметрами.	Письменная контрольная работа. Анализ и оценка результатов контрольной работы.	Приложение 3

Примечание. В таблице используются сокращения и обозначения:
1. Д.И.Мамонтов, Р.П.Ушаков. Функции и графики.- «Физикон», 2005 - [1]

ИД – интерактивная доска;

МП – мультимедийная презентация.